UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Osnove telekomunikacija

Doc. dr Enis Kočan (enisk@ucg.ac.me)
Saradnici: Dr Uglješa Urošević (ugljesa@ucg.ac.me)
MSc Slavica Tomović (slavicat@ucg.ac.me)

SADRŽAJ KURSA

1. Uvod. Opšti model telekomunikacionog sistema. Vrste prenosa signala.
2. Medijumi za prenos. Pojam modulacije.
3. Multipleksiranje. Referentni model za povezivanje otvorenih sistema (OSI i TCP/IP)
4. **Harmonijska analiza periodičnih signala**
5. Analiza aperiodičnih signala i slučajnih signala
6. Prenos signala kroz linearne sisteme. Izobličenja pri prenosu signala
7. Ampllitudske modulacije
8. Demodulacija AM signala. Realizacija multipleksa sa frekvencijskom raspodjelom kanala
9. Ugaona modulacija. Spektar UM signala
10. FM modulatori. Demodulacija FM signala
11. Slučajni šum. Karakteristike uskopojasnog šuma
12. Uticaj šuma na prenos amplitudski modulisanih signala
13. Uticaj šuma na prenos ugaono modulisanih signala

Termin 4 - Sadržaj

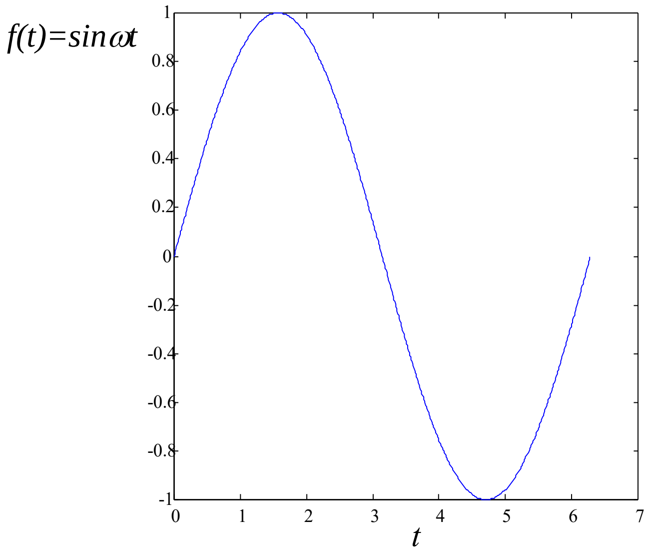
- **Fourierov red**
- Parsevalova teorema za periodične signale
- Korelacija periodičnih signala
- Konvolucija periodičnih signala

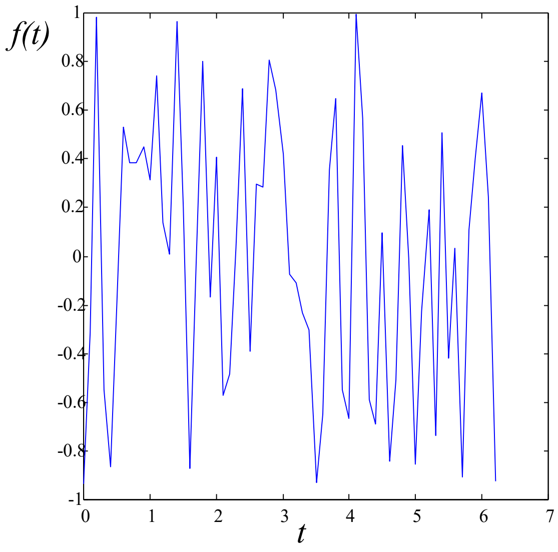
Priroda signala

Generalno se može govoriti o dvije grupe signala koji se pojavljuju u komunikacionim sistemima:

- **determinističkim**, čije su vrijednosti u vremenu opisane preciznim analitičkim izrazom;

- **slučajnim**, za koje nije moguće definisati odgovarajući analitički izraz kojim bi se unaprijed opisao njihov vremenski tok.

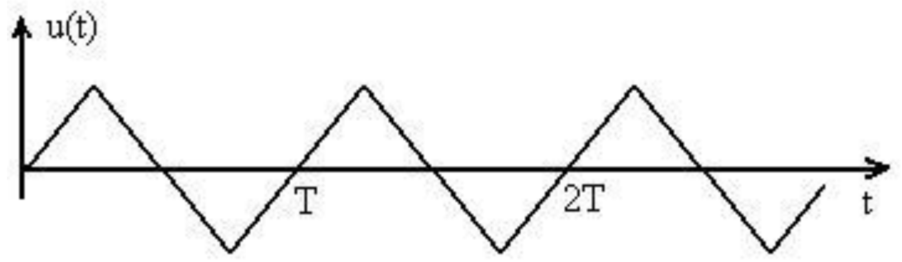


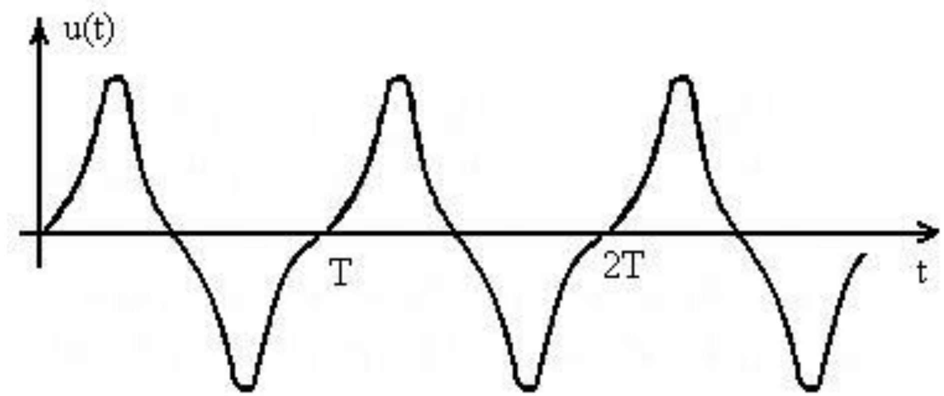


Deterministički signali

Deterministički signali se mogu podijeliti u dvije grupe:

1. **Periodični**
2. **Aperiodični**



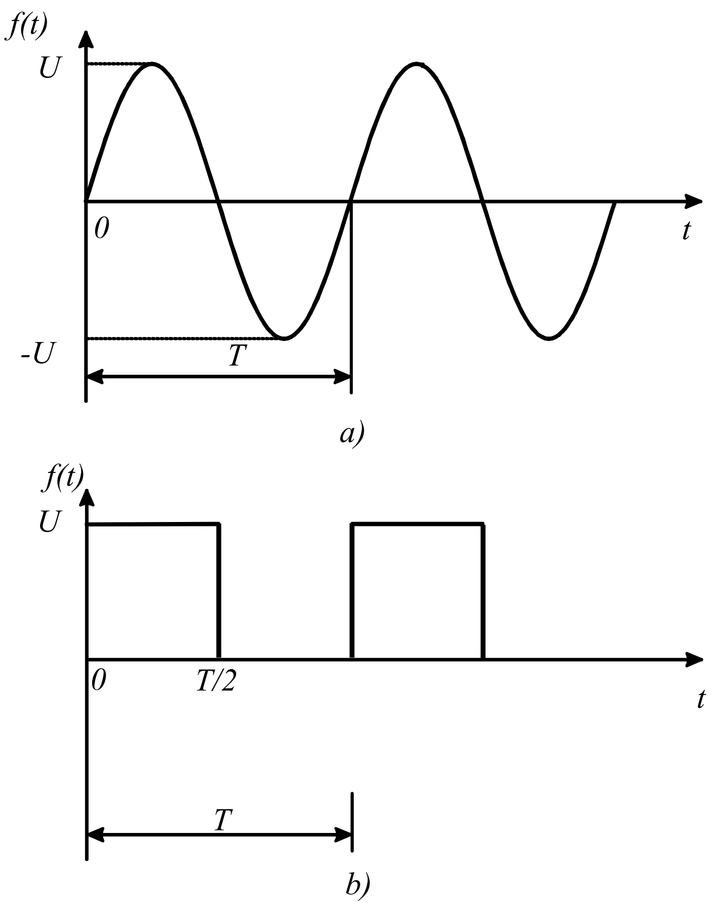


Periodičan je svaki signal koji zadovoljava uslov:

$$f(t)=f(t+T)$$

gdje je *T* perioda signala *f(t)*.

Harmonijska analiza



- U ispitivanju osobina determinističkih signala koristi se **harmonijska analiza**.
- Harmonijska analiza ima za cilj da prikaže signal u domenu učestanosti, a zasniva se na teoriji Fourrierovih redova i Fourrierove transformacije.
- Za periodične signale se primjenjuje analiza pomoću ***Fourrierovih redova***, a za aperiodične ***Fourrierova transformacija***.

Primjeri periodičnih signala: a) sinusni signal;

b) povorka pravougaonih impulsa

Fourrier-ov red

Da bi se periodična funkcija razvila u Fourrier-ov red mora biti zadovoljen **Dirichlet-ov uslov**:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t) \right| dt < \infty$$

Fourrier-ov red tada može imati jedan od sledećih oblika:

1. Trigonometrijski oblik

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$T=2\pi/\omega_0$ je *perioda*, **$\omega_0=2\pi f_0$** *osnovna kružna učestanost*, **a_n** i **b_n** *Fourrierovi koeficijenti*.

Fourrier-ov red

1. b) Trigonometrijski oblik

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \theta_n = arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

2. Kompleksni oblik

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

Kako je:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \qquad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

to je:

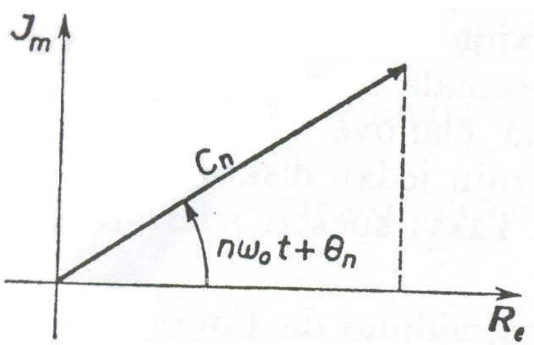
$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n| e^{j\theta_n} \qquad F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

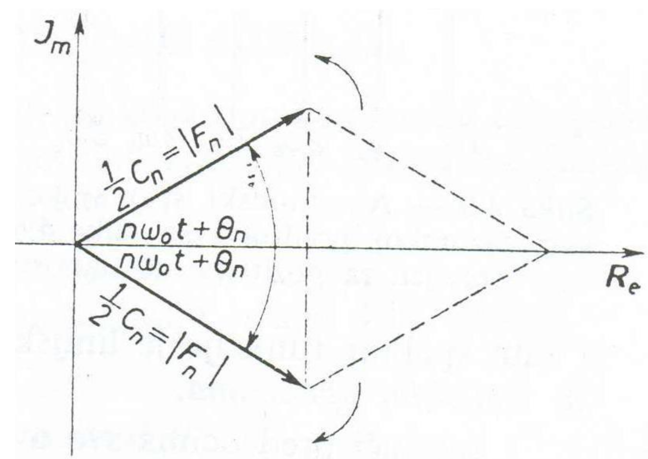
Amplitudski i fazni spektar

- Veza izmedju amplituda harmonika C_n i modula kompleksne veličine F_n data je izrazom:

$$\left|F_n\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}C_n$$

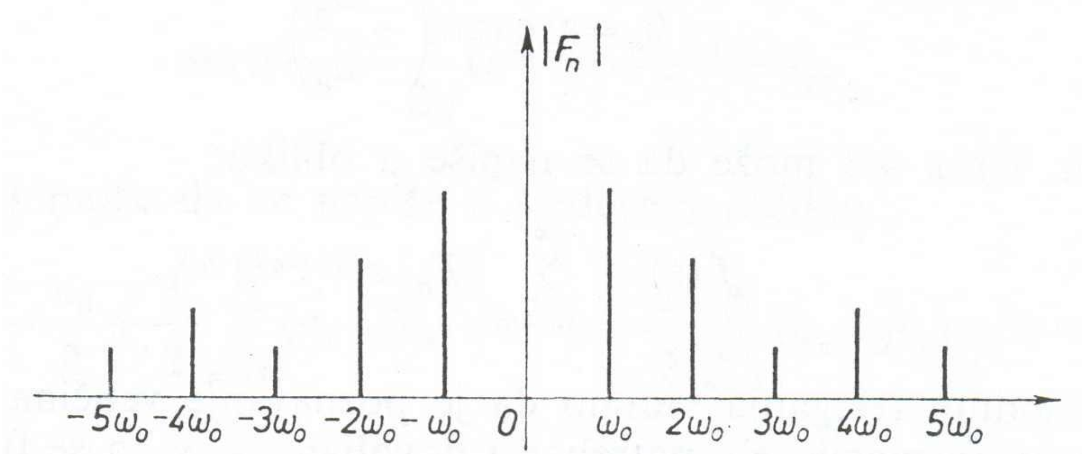
- Fourrierova transformacija ***F_n*** naziva se još i ***kompleksnim spektrom*** funkcije $f(t)$.
- Moduo F_n se naziva ***amplitudski***, a njen argument θ_n ***fazni spektar*** funkcije $f(t)$.
- Fazorska predstava



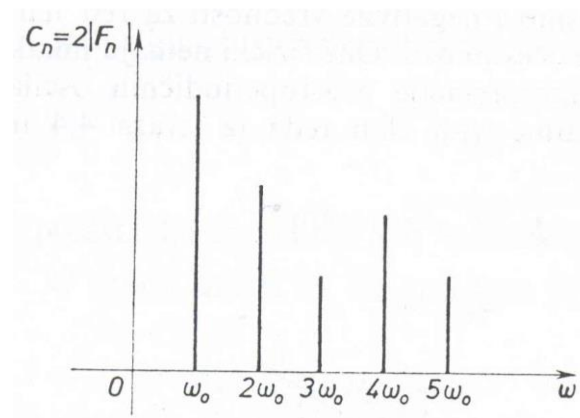


Jednostrani i dvostrani spektar

- Uobičajeno je da se vrši grafičko prikazivanje signala u domenu frekvencija, i to posebno amplitudskog i faznog spektra. Postoje dva načina:
  1. i za pozitivne i negativne učestanosti (dvostrani spektar)
  2. samo za pozitivne učestanosti, s tim što je amplituda odgovarajućeg harmonika 2 puta veća (jednostrani spektar).
- Kompleksni spektri periodičnih signala su diskretni, pa se nazivaju ***diskretnim*** ili ***linijskim*** spektrima.

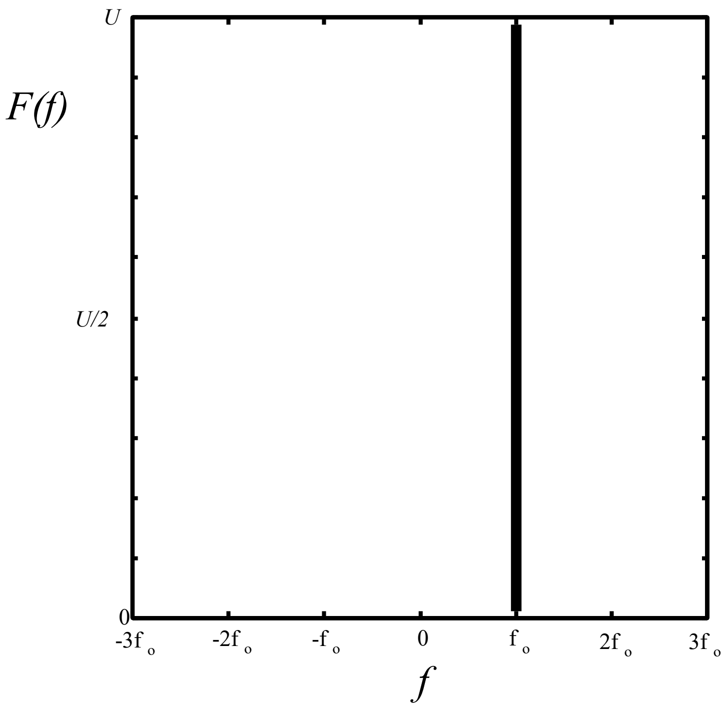


Dvostrani amplitudski spektar

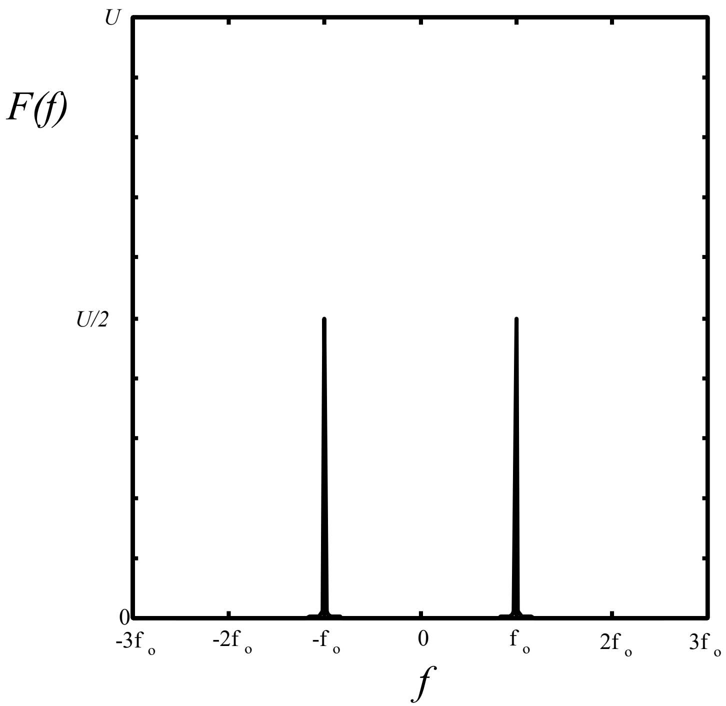


Jednostrani amplitudski spektar

Jednostrani i dvostrani spektar



Jednostrani amplitudski spektar prostoperiodičnog signala



Dvostrani amplitudski spektar prostoperiodičnog signala

Termin 4 - Sadržaj

- Fourierov red
- **Parsevalova teorema za periodične signale**
- Korelacija periodičnih signala
- Konvolucija periodičnih signala

Parsevalova teorema

- Bitna karakteristična veličina periodičnog signala *f*(*t*) je njegova ***efektivna vrijednost***:

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right] = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt}$$

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right]^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2$$

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right]^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Parsevalova teorema

- Poslednja relacija je poznata kao ***Parsevalova teorema*** za periodične signale:
  - Kvadrat efektivne vrijednosti brojno je jednak snazi koju taj signal razvija na otporniku od jednog oma.
  - Ukupna srednja snaga složenog signala jednaka je sumi snaga svih njegovih harmonika.

Termin 4 - Sadržaj

- Fourierov red
- Parsevalova teorema za periodične signale
- **Korelacija periodičnih signala**
- Konvolucija periodičnih signala

Korelacija periodičnih signala

- U opštoj harmonijskoj analizi periodičnih signala poseban značaj ima pojam ***korelacije*** koja povezuje dva periodična signala.
- Neka su signali opisani funkcijama $f_1(t)$ i $f_2(t)$ koje imaju istu periodu $\mathbf{T=2\pi/\omega_0}$. Fourrierove transformacije ovih funkcija su:

$$F_{n1} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Korelacija periodičnih signala

- Njihova korelacije se definiše na sledeći način:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t+\tau)\,dt, \qquad -\infty < \tau < \infty$$

τ predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu u intervalu od -∞ do ∞, pri čemu τ ne zavisi od t.

Traženje korelacije dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne od funkcija u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom iste periode
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Teorema o korelaciji

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0(t+\tau)}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}^{*} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ je periodična funkcija po τ, sa periodom $T=2\pi/\omega_0$ i njen kompleksni spektar je proizvod $F_{n1}^{*}F_{n2}$. Stoga važi:

$$F_{n1}^{*} F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

$R_{12}(\tau)$ i $F_{n1}^{*}F_{n2}$ obrazuju Fourrierov transformacioni par. Ovaj stav se naziva ***teoremom o korelaciji*** periodičnih funkcija. Uvedena funkcija $R_{12}(\tau)$ se naziva ***korelaciona funkcija (unakrsna korelacija)***.

Autokorelaciona f-ja i spektar snage

- Posmatrajmo specijalan slučaj korelacije dva identična signala $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$.

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t+\tau)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Ovako definisana korelaciona funkcija se naziva ***autokorelaciona funkcija***. Njena vrijednost za $\tau=0$ je:

$$R_{11}(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Ovo je analitički izraz za **Parsevalovu teoremu**.

- Kako je $|F_n|^2$ snaga n-tog harmonika na jediničnom otporniku, veličina

$$S_{11}(n\omega_0)=|F_n|^2$$

se naziva ***spektar snage*** signala $f(t)$.

Teorema o autokorelaciji

- Shodno prethodnim izrazima, dobija se:

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\omega_0) e^{jn\omega_0\tau}$$

odnosno:

$$S_{11}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

- Autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ i spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ funkcije *f*(*t*) čine Fourrierov transformacioni par.

- Ovaj stav se naziva ***teorema o autokorelaciji periodičnih funkcija***.

Osobine autokorelacione funkcije

- Neke osobine autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$:

- Iz izraza za spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ vidimo da on ne zavisi od početnog faznog stava pojedinih harmonika. Pošto je $S_{11}(n\omega_0)$ istovremeno i kompleksni spektar autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$, to znači da ***sve periodične funkcije koje imaju iste amplitude harmonika, a međusobno se razlikuju po početnim faznim stavovima, imaju istu autokorelacionu funkciju***.

- $R_{11}(\tau)$ je ***periodična funkcija*** čija je perioda jednaka periodi funkcije $f(t)$, tj. $T=2\pi/\omega_0$.

- $R_{11}(\tau)$ je ***parna funkcija***, što se lako dokazuje:

$$R_{11}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(x)f(x+\tau)dx=R_{11}(\tau)$$

Kroskorelaciona funkcija

- Funkcija $R_{12}(\tau)$ nazvana je korelacionom funkcijom, a nekada se, da bi se istaklo da je riječ o dvije periodične funkcije istih perioda, za razliku od autokorelacione funkcije, ona naziva i ***unakrsnom (kroskorelacionom)*** funkcijom. Njen kompleksni spektar:

$$S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$$

se naziva spektrom ***unakrsne snage***.

- Neke osobine kroskorelacione funkcije $R_{12}(\tau)$:

  - Za kroskorelacionu funkciju bitan je redosled indeksa, tj. važi:

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

kao i:

$$S_{21}(n\omega_0) = F_{n2}^* F_{n1} = S_{12}^*(n\omega_0)$$

- U opštem slučaju $S_{12}(n\omega_0)$ je kompleksna veličina za razliku od $S_{11}(n\omega_0)$ koja je uvijek realna veličina.

Termin 4 - Sadržaj

- Fourierov red
- Parsevalova teorema za periodične signale
- Korelacija periodičnih signala
- **Konvolucija periodičnih signala**

Konvolucija periodičnih signala

- Ako imamo dva periodična signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$ iste periode $T=2\pi/\omega_0$, tada se integral:

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(\tau-t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n1}F_{n2}e^{jn\omega_0\tau}$$

zove **konvolucija** signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Lako se pokazuje da važi:

$$F_{n1}F_{n2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\rho_{12}(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

Teorema o konvoluciji periodičnih funkcija:

- Konvolucija $\rho_{12}(\tau)$ funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i proizvod njihovih kompleksnih spektara $F_{n1}F_{n2}$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Konvolucija periodičnih signala

Slično korelaciji i kod konvolucije imamo tri operacije:

1. Pomjeranje funkcije $f_2(t)$ u vremenu za τ i njeno preslikavanje simetrično u odnosu na ordinatnu osu
2. Množenje tako dobijene funkcije sa periodičnom funkcijom $f_1(t)$
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Osobine konvolucije:

- Konvolucija periodičnih funkcija je periodična funkcija čija je perioda jednaka periodi signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, a njen kompleksni spektar je jednak proizvodu $F_{n1}F_{n2}$.

- Važi relacija: $\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$